ETH zürich
Departement Informatik

Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Dennis Komm

courses.ite.inf.ethz.ch/approx_online_alg_22

Übungsaufgaben – Blatt 5

Zürich, 24. März 2022

Aufgabe 8

Wir betrachten die Probleme Minimum-Vertex-Cover (Min-VC) und Maximum-Clique (Max-CL). Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ sei der Komplementgraph zu G definiert als $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$, wobei $E^{\complement} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$C \subseteq V \text{ ist ein Vertex-Cover von } G \iff V \setminus C \text{ ist eine Clique von } G^{\complement} \tag{1}$$

(b) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen G_n an, an dem Sie zeigen, dass die durch (1) beschriebene Transformation nicht verwendet werden kann, um zu zeigen, dass Max-CL $\leq_{\text{AP}}$ Min-VC.

Hinweis: Wie in der Vorlesung kurz angesprochen wurde, kann man Lemma 4.4.3.2 aus dem Buch so abwandeln, dass es nicht nur Aussagen über die AP-Reduzierbarkeit von U_1 auf U_2 macht, falls für U_2 ein PTAS existiert, sondern dass sich das Ergebnis auch auf Approximationsalgorithmen mit konstanter Güte überträgt.

Dafür kann die Definition für AP-Reduzierbarkeit von U_1 auf U_2 ($U_1 \leq_{AP} U_2$) folgendermassen abgeändert werden: Die Funktionen F und H bekommen jeweils einen Parameter $\beta \in \mathbb{Q}^{\geq 1}$ statt wie bisher den Parameter $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$. Ausserdem müssen die Bedingungen $(i) - (v)$ nur für *ein* β gelten statt für alle ε. Insbesondere wird Bedingung (v) wie folgt geändert:

Für alle $x \in L_{I,1}$, $y \in \mathcal{M}_2(F(x, \beta))$ und ein $\beta \in \mathbb{Q}^{\geq 1}$:

$$\max\left\{\frac{\text{Opt}_{U_2}(F(x,\beta))}{\text{cost}_2(y)}, \frac{\text{cost}_2(y)}{\text{Opt}_{U_2}(F(x,\beta))}\right\} \leq \beta \quad \text{impliziert}$$
$$\max\left\{\frac{\text{cost}_1(H(x,\beta,y))}{\text{Opt}_{U_1}(x)}, \frac{\text{Opt}_{U_1}(x)}{\text{cost}_1(H(x,\beta,y))}\right\} \leq 1 + \alpha \cdot (\beta - 1).$$

(bitte wenden)

Daraus ergibt sich diese abgewandelte Form von Lemma 4.4.3.2:

> Seien U_1 und U_2 Optimierungsprobleme. Falls ein Approximationsalgorithmus für U_2 mit Güte $\beta \in \mathbb{Q}^{\geq 1}$ existiert und $U_1 \leq_{AP} U_2$, dann existiert auch ein Approximationsalgorithmus für U_1 mit Güte $1 + \alpha \cdot (\beta - 1)$ für eine Konstante $\alpha > 0$.

10 Punkte

Abgabe: Am 31. März zu Beginn der Übungsstunde.