Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Dennis Komm

`courses.ite.inf.ethz.ch/approx_online_alg_22`

Lösungsvorschläge – Blatt 5

Zürich, 31. März 2022

Lösung zu Aufgabe 8

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ der Komplementgraph von G.

(a) Wir zeigen zunächst indirekt die folgende Behauptung:

> Für jedes $C \subseteq V$, das ein Vertex-Cover in G ist, ist $V \setminus C$ eine Clique in $G^{\complement}$.

Sei C ein Vertex-Cover in G. Wenn nun $V \setminus C$ keine Clique in $G^{\complement}$ ist, existieren zwei Knoten $u, v \in V \setminus C$, für die gilt, dass $\{u, v\} \notin E^{\complement}$. Daraus folgt jedoch $\{u, v\} \in E$. Damit wäre die Kante $\{u, v\}$ aber nicht von C überdeckt, was im Widerspruch zur Annahme steht, C sei ein Vertex-Cover von G.

Auf der anderen Seite sei $V \setminus C$ eine Clique in $G^{\complement}$ und sei die Kante $\{u, v\} \in E$, also $\{u, v\} \notin E^{\complement}$. Wenn nun weder der Knoten u noch der Knoten v in C liegen ($u, v \notin C$), dann gilt $u, v \in V \setminus C$. Diese beiden Knoten sind aber in $G^{\complement}$ nicht verbunden, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass $V \setminus C$ eine Clique in $G^{\complement}$ ist.

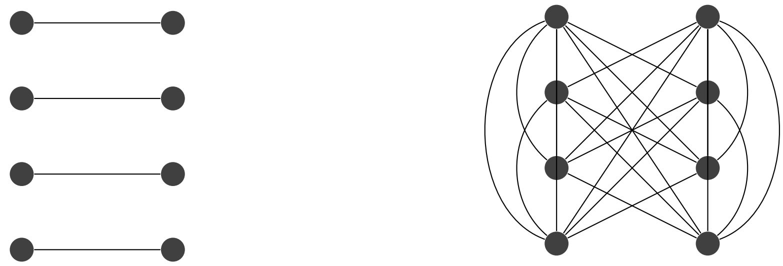
Damit folgt für jedes $k \leq |V|$, dass G genau dann ein Vertex-Cover der Grösse $|V| - k$ enthält, wenn $G^{\complement}$ eine Clique der Grösse k enthält.

(b) Wie verwenden die im Hinweis beschriebene Variante von Definition 4.4.3.1.

Um mit Hilfe der Transformation (1) zu beweisen, dass Max-CL AP-reduzierbar auf Min-VC ist, müssten wir nun zeigen, dass Folgendes gilt: Man kann eine beliebige Max-CL-Instanz nehmen, den Komplementgraphen bilden, auf diesem einen Min-VC-Approximationsalgorithmus mit Güte β laufen lassen und kann dann die berechnete Lösung C durch die Transformation (1) in eine Lösung $V \setminus C$ von Max-CL umformen. Diese Lösung müsste dann eine $(1 + \alpha \cdot (\beta - 1))$-Approximation für die optimale Lösung der Max-CL-Instanz sein (für irgendein konstantes α). Wir geben nun eine Familie von Graphen an, für die dies offensichtlich nicht gilt:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei G_n der Graph, der aus n disjunkten Paaren von Knoten besteht (siehe Abbildung 1(a)). Der Komplementgraph $(G_n)^{\complement}$ enthält dann Cliquen mit jeweils n Knoten (siehe Abbildung 1(b)), z. B. die Menge der linken Knoten in der Abbildung, aber auch jede andere Knotenmenge, die genau einen Knoten aus jeder

Kante aus G_n enthält. Diesen Graphen $(G_n)^{\mathsf{C}}$ nehmen wir als Eingabe-Instanz für Max-CL.



(a) Graph G_n für $n = 4$ (b) Komplementgraph $(G_n)^{\mathsf{C}}$

Abbildung 1: Graph und Komplementgraph für $n = 4$.

Nun formen wir diese Max-CL-Instanz $(G_n)^{\mathsf{C}}$ in eine Min-VC-Instanz um. Dazu berechnen wir den Komplementgraphen von $(G_n)^{\mathsf{C}}$ und erhalten $((G_n)^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} = G_n$. Auf die Min-VC-Instanz wenden wir den Vertex-Cover-Algorithmus aus der Vorlesung an. Dieser ist 2-approximativ und nimmt hier alle Knoten von G_n in das Vertex-Cover C auf. Benutzt man nun die Transformation aus (1), erhält man die Aussage:

$$V \text{ ist ein Vertex-Cover von } G_n \iff V \setminus V = \emptyset \text{ ist eine Clique von } (G_n)^{\mathsf{C}}.$$

Für die ursprüngliche Instanz für Max-CL erhalten wir mit diesem Vorgehen also die Clique $\emptyset$ der Grösse 0. Da jeder Graph aber eine Clique der Grösse mindestens 1 enthält (und $(G_n)^{\mathsf{C}}$ sogar eine Clique der Grösse n), kann keine Approximationsgüte für das Max-CL-Problem erreicht werden. Insbesondere ist die so erreichte Güte sicherlich schlechter als $1 + \alpha \cdot (\beta - 1) = 1 + \alpha$ für jedes konstante α.

Wir werden später in der Vorlesung sogar zeigen, dass Max-CL überhaupt nicht konstant approximierbar ist, falls $P \neq NP$.