ETH zürich
Departement Informatik

Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Dennis Komm

https://courses.ite.inf.ethz.ch/appron22

Lösungsvorschläge – Blatt 6

Zürich, 7. April 2022

Lösung zu Aufgabe 9

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass Max-CL nicht konstant approximierbar ist. Falls wir nun zeigen könnten, dass Max-CL $\leq_{\text{AP}}$ Max-IS gilt, wüssten wir, dass auch Max-IS in polynomieller Zeit nicht konstant approximierbar ist.

Wir geben nun also eine AP-Reduktion von Max-CL auf Max-IS an. Als Abbildungsfunktion der Probleminstanzen nehmen wir die Funktion F, die einen Eingabegraphen $G = (V, E)$ für Max-CL auf seinen Komplementgraphen $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ abbildet. Eine Clique in G entspricht einem Independent Set in $G^{\complement}$. Diese Reduktion ist approximationserhaltend mit $\alpha = 1$ für Max-CL und Max-IS, da die Lösungen sich exakt entsprechen. Die Lösungsabbildung H ist hierbei die Identität.

Es gilt somit sowohl Max-IS $\leq_{\text{AP}}$ Max-CL als auch Max-CL $\leq_{\text{AP}}$ Max-IS.

Aus Max-CL $\leq_{\text{AP}}$ Max-IS folgt unter der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dass Max-IS nicht konstant approximierbar ist. Denn gäbe es einen Algorithmus, der Max-IS konstant approximiert, könnte mit der oben angegebenen Reduktion auch Max-CL konstant approximiert werden, was im Widerspruch zum Ergebnis der Vorlesung steht.

Lösung zu Aufgabe 10

Sei $C = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$ eine gegebene MaxE3Sat-Eingabe über den Variablen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Mit $|C|$ bezeichnen wir die Länge der Eingabe durch die Anzahl der enthaltenen Klauseln. Es gilt $|C| = m$.

Wir konstruieren aus C eine Max2Sat-Eingabe Φ wie folgt: Für jede Klausel C_i, $1 \leq i \leq m$, konstruieren wir zunächst eine Teilformel Φ_i.

Sei $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$. Dann definieren wir

$$\Phi_i = (l_{i,1} \vee y_i) \wedge (l_{i,2} \vee y_i) \wedge (l_{i,3} \vee y_i) \wedge (l_{i,1} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,2} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,3} \vee \overline{y_i}) \ .$$

Dabei ist y_i eine neue Variable, die in C nicht vorkommt, für alle $1 \leq i \leq m$.

Die vollständige Max2Sat-Instanz ist nun $\Phi = \bigwedge_{i=1}^{m} \Phi_i$.

Für jede Belegung β, die C_i erfüllt, gilt unabhängig von der Belegung von y_i,

$$\begin{aligned}
&\text{genau 1 Literal in } C_i \text{ erfüllt} \implies \text{4 Klauseln in } \Phi_i \text{ erfüllt,}\\
&\text{genau 2 Literale in } C_i \text{ erfüllt} \implies \text{5 Klauseln in } \Phi_i \text{ erfüllt,}\\
&\text{genau 3 Literale in } C_i \text{ erfüllt} \implies \text{6 Klauseln in } \Phi_i \text{ erfüllt.}
\end{aligned}$$

Für eine Belegung β, die C_i nicht erfüllt, gilt wiederum unabhängig von der Belegung von y_i, dass sie genau 3 Klauseln in Φ_i erfüllt.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Transformation eine GP-Reduktion von MaxE3Sat auf Max2Sat mit den Parametern (c, s) und $(c', s') = (\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot c, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot s)$ ist.

Sei C eine MaxE3Sat-Formel mit $\text{cost}(\text{Opt}(C)) < s \cdot m = s \cdot |C|$.

Für jede Klausel, die in C erfüllt ist, werden in Φ maximal 6 Klauseln erfüllt. Und für jede nicht erfüllte Klausel in C werden genau 3 Klauseln in Φ erfüllt. Somit gilt für die Anzahl t_s erfüllter Klauseln in Φ:

$$t_s < 6 \cdot s \cdot m + 3 \cdot (1 - s) \cdot m = (3 + 3s) \cdot m.$$

Für jede Klausel in C wurden 6 Klauseln in Φ erzeugt, es gilt also $|\Phi| = 6m$.

Damit folgt für den Parameter s', dass

$$\frac{\text{cost}(\text{Opt}(\Phi))}{|\Phi|} < \frac{(3 + 3s) \cdot m}{6 \cdot m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot s = s' \ .$$

Sei C eine MaxE3Sat-Formel mit $\text{cost}(\text{Opt}(C)) \geq c \cdot m$.

Für jede Klausel, die in C erfüllt ist, werden mindestens 4 Klauseln in Φ und für jede nicht erfüllte Klausel in C werden genau 3 Klauseln in Φ erfüllt.

Damit ergibt sich für die Anzahl t_c erfüllter Klauseln in Φ:

$$t_c \geq 4 \cdot c \cdot m + 3 \cdot (1 - c) \cdot m = (3 + c) \cdot m.$$

Es folgt für den Parameter c', dass

$$\frac{\text{cost}(\text{Opt}(\Phi))}{|\Phi|} \geq \frac{(3 + c) \cdot m}{6 \cdot m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot c = c' \ .$$

Damit dies eine gültige GP-Reduktion ist, muss gelten, dass $0 \leq s' < c' \leq 1$. Die Bedingungen $0 \leq s' < 1$ und $0 < c' \leq 1$ folgen unmittelbar aus der Voraussetzung $0 \leq s < c \leq 1$.

Damit aber $s' < c'$ gilt, muss gelten, dass

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot s < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot c \ ,$$

also $s < \frac{1}{3} \cdot c$.

Da aber für keine Wahl von s und c mit $s < \frac{1}{3} \cdot c$ das Lückenproblem $\text{GAP}_{s,c}$-MaxE3Sat $\mathcal{NP}$-schwer ist, ist diese GP-Reduktion nicht hilfreich, um die Schwere von Max2Sat nachzuweisen.