ETH zürich
Departement Informatik

Approximations- und Online-Algorithmen

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Dr. Dennis Komm

`https://courses.ite.inf.ethz.ch/appron22`

Lösungsvorschläge – Blatt 10

Zürich, 12. Mai 2022

Lösung zu Aufgabe 15

(a) Wir beweisen im Folgenden, dass ein 1-kompetitiver Online-Algorithmus existiert, wenn der Gegenspieler gleichverteilt eine Instanz $I \in \mathcal{I}$ zieht, wobei I mit einer Wahrscheinlichkeit von $\text{Prob}_m(I) = 1/m$ ausgewählt wird.

Seien $I_1, I_2, \ldots, I_m$ die Instanzen in $\mathcal{I}$ und sei $\textsc{Opt}(I_i)$ die optimale LFD-Lösung für I_i mit $1 \leq i \leq m$. Beachten Sie, dass die Instanzen bekannt sind. Wir betrachten den deterministischen Online-Algorithmus $\textsc{Alg}$, der zunächst o. B. d. A. $\textsc{Opt}(I_1)$ simuliert. Wenn I_1 die tatsächlich ausgewählte Instanz ist, ist die von $\textsc{Alg}$ berechnete Lösung optimal. Falls $\textsc{Alg}$ hingegen in einem Zeitschritt feststellen sollte, dass die gewählte Instanz nicht I_1 ist, simuliert er von diesem Moment an $\textsc{Opt}(I_2)$. Zu diesem Zweck ersetzt $\textsc{Alg}$ seinen Cacheinhalt, sodass er dem von $\textsc{Opt}(I_2)$ entspricht (dies nehmen wir nur der Einfachheit halber an, tatsächlich kann $\textsc{Alg}$ seinen Cache nach und nach an den optimalen anpassen).

Wir behaupten, dass $\textsc{Opt}(I_1)$ und $\textsc{Opt}(I_2)$ dieselbe Anzahl von Seitenfehlern auf dem gemeinsamen Präfix von I_1 und I_2 verursachen. Bezeichne j den Index der ersten Position, in der I_1 und I_2 sich unterscheiden, wie im folgenden Bild dargestellt.

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1} \begin{cases} x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n & I_1 \\ x'_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_n & I_2 \end{cases}$$

Nehmen wir an, dass eine Seite im Präfix $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ angefragt wird, die einen Seitenfehler für $\textsc{Opt}(I_1)$ verursacht, aber nicht für $\textsc{Opt}(I_2)$; sei x_i die erste solche Seite. $\textsc{Opt}(I_1)$ hat x_i in einem vorherigen Zeitschritt ersetzt, da es diejenige war, die am weitesten in der Zukunft wieder angefragt werden würde, nämlich im i-ten Zeitschritt. Da dies allerdings im gemeinsamen Präfix von I_1 und I_2 passiert sein muss (wegen $i \leq j-1$), hat $\textsc{Opt}(I_2)$ dieselbe Seite ersetzt, was zu einem Widerspruch führt.

Sollte I_2 die tatsächlich ausgewählte Instanz sein, so folgt, dass die Kosten von $\textsc{Alg}$ höchstens $\text{cost}(\textsc{Opt}(I_2)) + k$ sind, wegen der zusätzlichen Kosten für das Wechseln von $\textsc{Opt}(I_1)$ zu $\textsc{Opt}(I_2)$.

Sollte $\textsc{Alg}$ feststellen, dass die gewählte Instanz nicht I_2 ist, so können wir das obige Argument iterieren. In diesem Fall simuliert $\textsc{Alg}$ also $\textsc{Opt}(I_3)$, usw. Jede solche Änderung verursacht Kosten von k. Sei I_d mit $1 \leq d \leq m$ die tatsächlich ausgewählte Instanz. Wir erhalten

$$\mathbb{E}_{\textsc{Adv}}[\mathrm{cost}(\textsc{Alg}(\mathcal{I}))] \leq \mathrm{cost}(\textsc{Opt}(I_d)) + (d-1)k \leq \mathrm{cost}(\textsc{Opt}(I_d)) + (m-1)k\ ,$$

und da weder m noch k von der Eingabelänge abhängen, ist $\textsc{Alg}$ 1-kompetitiv (im Erwartungswert).

(b) Falls der Gegenspieler eine andere bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung als die Gleichverteilung über $\mathcal{I}$ wählt, gibt dies $\textsc{Alg}$ nur einen Vorteil, da er in diesem Fall die Instanzen ihrer Wahrscheinlichkeit nach sortieren und dann die optimalen Lösungen bezüglich dieser Sortierung simulieren kann. Es folgt, dass es im Fall einer bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung eine beste Strategie für den Gegenspieler ist, die Eingaben gleichverteilt zu wählen.

Sollte die Verteilung nicht bekannt sein, funktioniert die Argumentation aus Aufgabenteil (a) noch immer, da es weiterhin maximal $m-1$ Wechsel gibt und der Zeitpunkt für einen Wechsel noch immer analog erkannt werden kann.