

# Grenzverteidigung

Jakub Závodný @ ClevAlg Kurs

23.10.2019



# Grenzverteidigung

# Grenzverteidigung

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 5 und 12?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 5 und 12?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

$$1 + 8 + 3 + 6 + 8 + 3 + 3 + 5 = 37$$

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 2 und 8?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Der General wird noch **viele** weitere Fragen haben ...

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

... und wird die Antworten **schnell** brauchen. Ihr könnt euch aber vorbereiten.

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 10 und 18?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20



# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 3 und 15?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 6 und 20?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

18					28					26					22				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 5 und 17?

18					28					26					22				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 5 und 17?

18					28						26					22			
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

$$1 + 28 + 26 + 7 + 1 = 63$$

# Grenzverteidigung

Wie viele Soldaten gibt es zwischen Sektoren 4 und 11?

18				28							26				22				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Wie schnell ist diese Methode? Wie viele Male muss man addieren?

18					28					26					22				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

Wie soll man die Grenze verteilen, wenn es N Sektoren gibt?



# Grenzverteidigung

Wie schnell ist diese Methode? Wie viele Male muss man addieren?

18					28					26					22				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

Zu kleine Gruppen  $\Rightarrow$  zu viele Gruppen

# Grenzverteidigung

Wie schnell ist diese Methode? Wie viele Male muss man addieren?

18					28					26					22				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

Zu grosse Gruppen  $\Rightarrow$  zu viele einzelne Sektoren ausserhalb der Gruppen

# Grenzverteidigung

Wie schnell ist diese Methode? Wie viele Male muss man addieren?

18					28					26					22				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

$\sqrt{N}$  Gruppen  $\Rightarrow$   $\sqrt{N}$  Sektoren in jeder Gruppe

$\Rightarrow$  man muss max  $3 * \sqrt{N}$ -mal addieren

# Grenzverteidigung

Geht es noch besser?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

94																			
79																15			
35								44								15			
17				18				19				25				15			
8		9		9		9		11		8		9		16		6		9	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

94																			
79																15			
35								44								15			
17				18				19				25				15			
8		9		9		9		11		8		9		16		6		9	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

94																			
79																15			
35								44								15			
17				18				19				25				15			
8		9		9		9		11		8		9		16		6		9	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

$$18 + 44 + 1 = 63$$

# Grenzverteidigung

94																			
79																15			
35								44								15			
17				18				19				25				15			
8		9		9		9		11		8		9		16		6		9	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20



# Grenzverteidigung

94																			
79																15			
35								44								15			
17				18				19				25				15			
8		9		9		9		11		8		9		16		6		9	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

Wie schnell ist diese Methode, wenn es N Sektoren gibt?

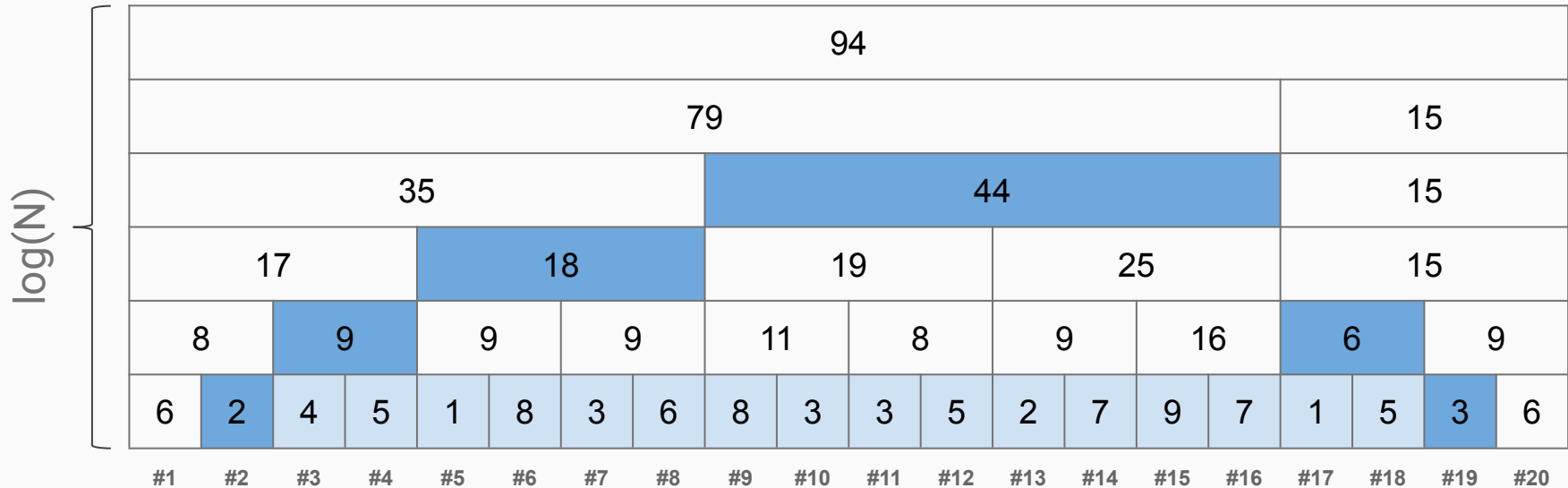
# Grenzverteidigung

$\log(N)$

94																			
79																15			
35								44								15			
17				18				19				25				15			
8		9		9		9		11		8		9		16		6		9	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

Wie schnell ist diese Methode, wenn es N Sektoren gibt?

# Grenzverteidigung



Wie schnell ist diese Methode, wenn es N Sektoren gibt?

# Grenzverteidigung

dumm addieren	$N$	1'000'000	1'000'000'000
clever verteilen	$3*\sqrt{N}$	$3*1000 = 3000$	$3*31000 \sim 100'000$
mehrmals verteilen (segment tree)	$2*\log(N)$	$2*20 = 40$	$2*30 = 60$

# Grenzverteidigung

Geht es noch besser?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

6	8	12	17	18	26	29	35	43	46	49	54	56	63	72	79	80	85	88	94
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

6	8	12	17	18	26	29	35	43	46	49	54	56	63	72	79	80	85	88	94
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

6	8	12	17	18	26	29	35	43	46	49	54	56	63	72	79	80	85	88	94
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20



# Grenzverteidigung

6	8	12	17	18	26	29	35	43	46	49	54	56	63	72	79	80	85	88	94
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

6	8	12	17	18	26	29	35	43	46	49	54	56	63	72	79	80	85	88	94
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

$$54 - 17 = 37$$

# Grenzverteidigung

6	8	12	17	18	26	29	35	43	46	49	54	56	63	72	79	80	85	88	94
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

6	8	12	17	18	26	29	35	43	46	49	54	56	63	72	79	80	85	88	94
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

Immer nur 1 Subtraktion, für jedes N.

# Grenzverteidigung

dumm addieren	$N$	1'000'000	1'000'000'000
clever verteilen	$3*\text{sqrt}(N)$	$3*1000 = 3000$	$3*31000 \sim 100'000$
mehrmals verteilen (segment tree)	$2*\log(N)$	$2*20 = 40$	$2*30 = 60$
(prefix sum)	1	1	1

# Grenzverteidigung 2

Jakub Závodný @ ClevAlg Kurs

23.10.2019



# Grenzverteidigung Revisited

Was ist die schwächste Stelle zwischen Sektoren 5 und 12?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

Was ist die schwächste Stelle zwischen Sektoren 5 und 12?

6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

1



# Grenzverteidigung: Verteilen in Gruppen

1					3					2					1				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung: Verteilen in Gruppen

Was ist die schwächste Stelle zwischen Sektoren 5 und 16?

1					3					2					1				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung: Verteilen in Gruppen

Was ist die schwächste Stelle zwischen Sektoren 5 und 16?

1					3					2					1				
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

$$\min(1, \quad 3, \quad 2, \quad 7) = 1$$

# Grenzverteidigung: Segment Tree

1																			
1																1			
1								2								1			
2				1				3				2				1			
2		4		1		3		3		3		2		7		1		3	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung: Segment Tree

1																			
1																1			
1								2								1			
2				1				3				2				1			
2		4		1		3		3		3		2		7		1		3	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung: Segment Tree

1																			
1																1			
1								2								1			
2				1				3				2				1			
2		4		1		3		3		3		2		7		1		3	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

$$\min(8, 3, 2) = 2$$

# Grenzverteidigung: Prefix Minima

6	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung: Prefix Minima

6	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

Irgendwo dazwischen muss eine "1" sein!



# Grenzverteidigung: Prefix Minima

6	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

:-(

# Grenzverteidigung

dumm vergleichen	$N$	1'000'000	1'000'000'000
klug verteilen	$3*\text{sqrt}(N)$	$3*1000 = 3000$	$3*31000 \sim 100'000$
mehrmals verteilen (segment tree)	$2*\log(N)$	$2*20 = 40$	$2*30 = 60$
<del>(prefix sum)</del>	$\dagger$	$\dagger$	$\dagger$

# Grenzverteidigung

				1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1						
				1	1	1	1	1	3	2	2	2	2	1	1	1	1					
				1	1	1	1	1	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1				
				1	1	1	1	1	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1			
				2	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1		
				2	2	1	1	1	3	3	3	3	3	2	2	2	7	1	1	1	3	
				2	2	4	1	1	3	3	6	3	3	3	2	2	7	7	1	1	3	3
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6			
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20			

# Grenzverteidigung

				1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	3	2	2	2	2	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1		
			1	1	1	1	1	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	
		2	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	
		2	2	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	7	1	1	1	3	
	2	2	4	1	1	3	3	6	3	3	3	2	2	7	7	1	1	3	3
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

				1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	1	3	2	2	2	2	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1		
		2	1	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	
	2	2	1	1	1	1	3	3	3	3	3	2	2	2	7	1	1	1	3	
	2	2	4	1	1	3	3	6	3	3	3	2	2	7	7	1	1	3	3	
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6	
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	

# Grenzverteidigung

				1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	3	2	2	2	2	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1		
			1	1	1	1	1	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	
		2	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	
		2	2	1	1	1	3	3	3	3	3	2	2	2	7	1	1	1	3
	2	2	4	1	1	3	3	6	3	3	3	2	2	7	7	1	1	3	3
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20

# Grenzverteidigung

dumm vergleichen	$N$	1'000'000	1'000'000'000
klug verteilen	$3*\text{sqrt}(N)$	$3*1000 = 3000$	$3*31000 \sim 100'000$
mehrmals verteilen (segment tree)	$2*\log(N)$	$2*20 = 40$	$2*30 = 60$
alles vorberechnen	1	1	1

# Grenzverteidigung

dumm vergleichen	$N$	1'000'000	1'000'000'000
klug verteilen	$3*\text{sqrt}(N)$	$3*1000 = 3000$	$3*31000 \sim 100'000$
mehrmals verteilen (segment tree)	$2*\log(N)$	$2*20 = 40$	$2*30 = 60$
alles vorberechnen	Frage: 1 Vorbereitung: $\sim N^2$ Speicher: $\sim N^2$	1 $\sim 1'000'000'000'000$ $\sim 1\text{TB}$ Festplatte	1 $\sim 10^{18}$ $\sim 1000000$ Festplatten



								1	1	1	1	1							
--	--	--	--	--	--	--	--	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

# Grenzverteidigung

				1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1				
											?									
		2	1	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	
		2	2	4	1	1	3	3	6	3	3	3	2	2	7	7	1	1	3	3
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6	
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	

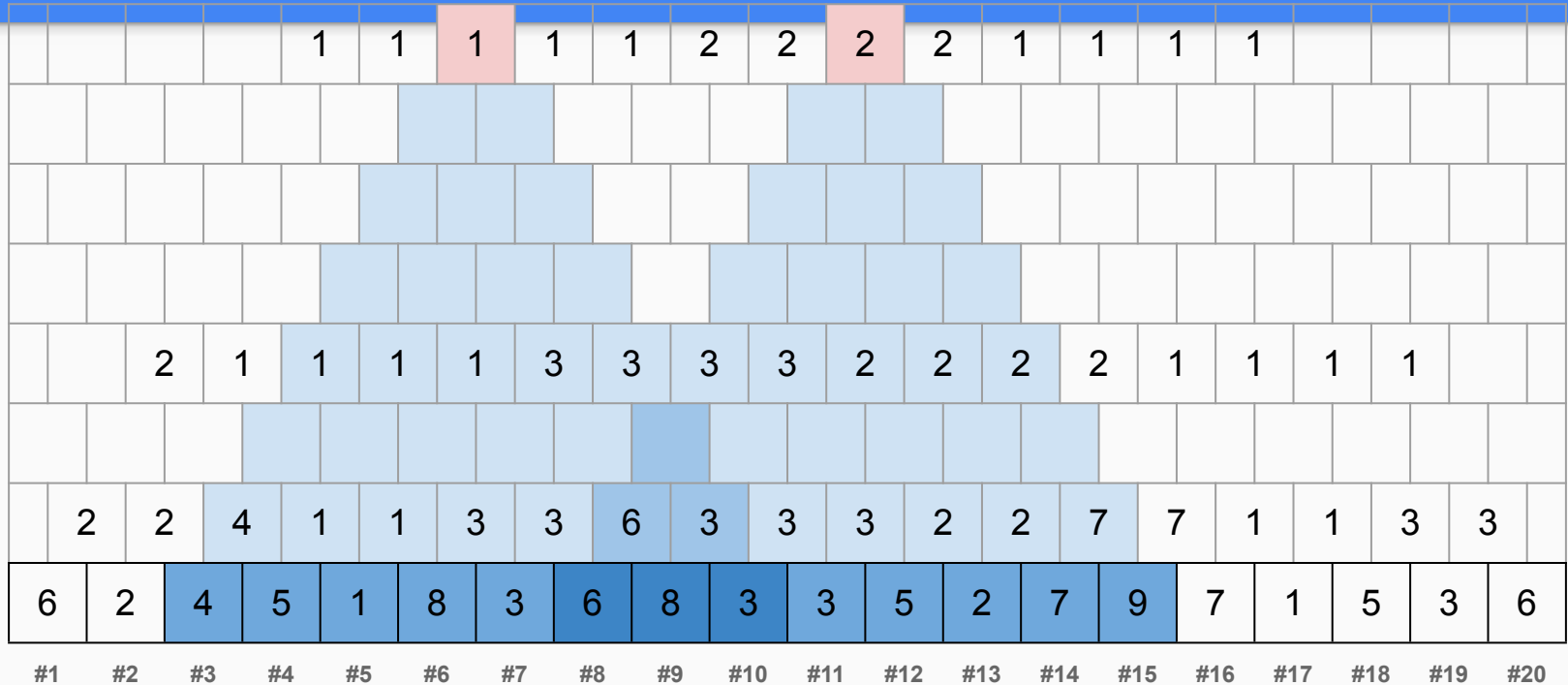
								1	1	1	1	1							
--	--	--	--	--	--	--	--	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

# Grenzverteidigung

				1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1				
											?									
		2	1	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	
		2	2	4	1	1	3	3	6	3	3	3	2	2	7	7	1	1	3	3
6	2	4	5	1	8	3	6	8	3	3	5	2	7	9	7	1	5	3	6	
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	



# Grenzverteidigung



# Grenzverteidigung

dumm vergleichen	N	1'000'000	1'000'000'000
klug verteilen	$3*\sqrt{N}$	$3*1000 = 3000$	$3*31000 \sim 100'000$
mehrmals verteilen (segment tree)	$2*\log(N)$	$2*20 = 40$	$2*30 = 60$
alles vorberechnen	Frage: 1 Vorbereitung: $\sim N^2$ Speicher: $\sim N^2$	1 $\sim 1'000'000'000'000$ $\sim 1\text{TB}$ Festplatte	1 $\sim 10^{18}$ $\sim 1000000$ Festplatten
nur Stockwerke 1,2,4,8,16, ... vorberechnen	Frage: 2 Vor: $\sim N*\log(N)$ Speicher: $\sim N*\log(N)$	2 $\sim 40'000'000$ $\sim 40$ MB	2 $\sim 60'000'000'000$ $\sim 60$ GB