

## Übungsaufgaben – Blatt 2

Zürich, 28. Februar 2023

### Aufgabe 2

Das Problem MAX-SAT besteht darin, für eine gegebene KNF-Formel  $\Phi$  eine Belegung zu finden, die möglichst viele Klauseln in  $\Phi$  erfüllt. Die entsprechende Schwellensprache ist

$$\text{Lang}_{\text{MAX-SAT}} = \{ (\Phi, k) \mid \Phi \text{ ist eine KNF-Formel, } k \in \mathbb{N}, \\ \text{und es existiert eine Belegung,} \\ \text{die mindestens } k \text{ Klauseln in } \Phi \text{ erfüllt} \}.$$

In dieser Aufgabe wollen wir Schritt für Schritt einen Kern für  $\text{Lang}_{\text{MAX-SAT}}$  bestimmen. Wie üblich nehmen wir an, dass in jeder Klausel einer KNF-Formel jede Variable höchstens einmal vorkommt.

- Sei  $m$  die Anzahl Klauseln in  $\Phi$ . Zeigen Sie, dass  $(\Phi, k) \in \text{Lang}_{\text{MAX-SAT}}$ , wenn  $k \leq \lceil m/2 \rceil$ .
- Wir unterteilen  $\Phi$  jetzt in zwei Teilmengen  $\Phi_l$  und  $\Phi_s$ . Die Menge  $\Phi_l$  enthält alle *langen* Klauseln, d. h. solche, die mindestens  $k$  Literale enthalten; die Menge  $\Phi_s$  enthält alle *kurzen* Klauseln, d. h. solche, die weniger als  $k$  Literale enthalten. Sei  $L$  die Anzahl langer Klauseln. Zeigen Sie, dass  $(\Phi, k) \in \text{Lang}_{\text{MAX-SAT}}$ , wenn  $L \geq k$ .
- Wir setzen jetzt also voraus, dass  $k > \lceil m/2 \rceil$  und  $L < k$ . Zeigen Sie, dass dann gilt  $(\Phi_s, k - L) \in \text{Lang}_{\text{MAX-SAT}} \iff (\Phi, k) \in \text{Lang}_{\text{MAX-SAT}}$ .
- Zeigen Sie jetzt, dass sich die Eingabe  $(\Phi, k)$  in Polynomzeit auf einen Kern mit höchstens  $2k^2$  Literalen reduzieren lässt.

**10 Punkte**

**Abgabe:** Bis Dienstag, den 7. März 2023, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter **Moritz Stocker**.