Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/`

Übungsaufgaben – Blatt 3

Zürich, 7. März 2023

Aufgabe 3

Das Problem 3-Hitting Set (3HS) ist eine Erweiterung des Problems Vertex Cover auf Hypergraphen mit Hyperkanten, die aus bis zu drei Knoten bestehen. Eine Instanz $(S, \mathcal{C})$ von 3HS besteht aus einer Grundmenge S (d.h. einer Knotenmenge) und einer Menge von Hyperkanten $\mathcal{C} \subseteq \{C \subseteq S \mid C \neq \emptyset \wedge |C| \leq 3\}$. Eine Hyperkante $C \in \mathcal{C}$ ist formal eine nichtleere Teilmenge von S mit maximaler Grösse 3. Eine Lösung für die Instanz $(S, \mathcal{C})$ ist eine Teilmenge $H \subseteq S$ der Grundmenge, sodass H mindestens ein Element aus jeder Hyperkante in $\mathcal{C}$ enthält (für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt $C \cap H \neq \emptyset$). Die entsprechende Schwellensprache ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}} = \{\, ((S, \mathcal{C}), k) \mid\ & (S, \mathcal{C}) \text{ ist eine Instanz von 3HS, } k \in \mathbb{N}, \\ & \text{und es existiert eine Lösung } H \text{ für } (S, \mathcal{C}) \\ & \text{mit } |H| \leq k \,\}. \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir die Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ für $\mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$ mit $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{6\}\}$, $k = 2$. Eine Lösung für diese Instanz besteht aus höchstens zwei Elementen, die jede Hyperkante aus $\mathcal{C}$ treffen. Eine zulässige Lösung ist $H = \{0, 6\}$ mit $|H| = 2 \leq k$. Somit gilt $((S, \mathcal{C}), k) \in \mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$.

Wir wollen zeigen, dass $\mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$ einen k-parametrisierten Algorithmus zulässt. Entwerfen Sie hierfür die folgenden Datenreduktionsregeln:

(a) Für eine Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ von $\mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$ und zwei feste Elemente $x, y \in S$, $x \neq y$, die in mehr als k Hyperkanten aus $\mathcal{C}$ gleichzeitig vorkommen, wobei $k \neq 0$, kann in Polynomzeit eine Instanz $((S', \mathcal{C}'), k')$ gefunden werden, so dass gilt:

1. $((S, \mathcal{C}), k) \in \mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}} \iff ((S', \mathcal{C}'), k') \in \mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$,
2. $|\mathcal{C}'| < |\mathcal{C}|$, d.h. $\mathcal{C}'$ enthält weniger Hyperkanten als $\mathcal{C}$, $k' \leq k$, und
3. x und y kommen in höchstens k' Hyperkanten aus $\mathcal{C}'$ gleichzeitig vor.

(b) Für eine Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ von $\mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$, auf die die Regel (a) nicht anwendbar ist, und ein festes Element $x \in S$, das in mehr als k^2 Hyperkanten aus $\mathcal{C}$ vorkommt, wobei $k \neq 0$, kann in Polynomzeit eine Instanz $((S', \mathcal{C}'), k')$ gefunden werden, so dass gilt:

1. $((S, \mathcal{C}), k) \in \text{Lang}_{3\text{HS}} \iff ((S', \mathcal{C}'), k') \in \text{Lang}_{3\text{HS}}$,
2. $|\mathcal{C}'| < |\mathcal{C}|$, d.h. $\mathcal{C}'$ enthält weniger Hyperkanten als $\mathcal{C}$, $k' \leq k$, und
3. x kommt in höchstens k'^2 Hyperkanten aus $\mathcal{C}'$ vor.

Verwenden Sie die Datenreduktionsregeln (a) und (b), um zu zeigen, dass $\text{Lang}_{3\text{HS}}$ einen Problemkern $((S^*, \mathcal{C}^*), k^*)$ mit $|\mathcal{S}^*| \in \mathcal{O}(k^3)$, $|\mathcal{C}^*| \in \mathcal{O}(k^3)$, $k^* \in \mathcal{O}(k)$ besitzt. Leiten Sie daraus einen k-parametrisierten Algorithmus für $\text{Lang}_{3\text{HS}}$ ab. **10 Punkte**

Abgabe: Bis Dienstag, den 14. März 2023, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.