ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/`

Übungsaufgaben – Blatt 5

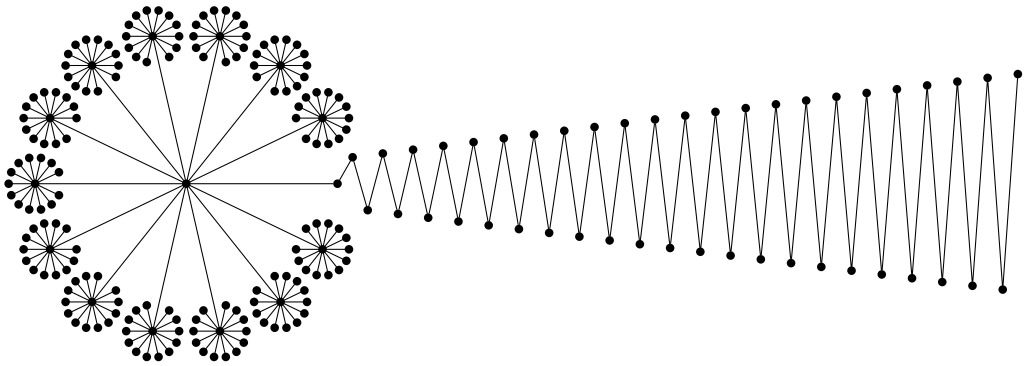
Zürich, 21. März 2023

Aufgabe 5

Wir betrachten die Graphklasse $G_k = (V_k, E_k)$, für $k \geq 3$, mit

$$\begin{aligned} V_k &= \{r\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq k-2\} \cup \{w_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq k-2\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq 3k+1\}, \\ E_k &= \{\{r, v_i\} \mid 1 \leq i \leq k-2\} \cup \{\{v_i, w_{i,j}\} \mid 1 \leq i, j \leq k-2\} \\ &\quad \cup \{\{r, u_1\}\} \cup \{\{u_i, u_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq 3k\}. \end{aligned}$$

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für $k = 15$.



(a) Zeigen Sie, dass die Kombination der beiden in der Vorlesung vorgestellten fpt-Algorithmen für VertexCover, bei der zunächst die einfachen Datenreduktionsregeln – jene, in der Knoten mit Grad 0 oder grösser als k gelöscht werden – angewandt wird und dann der Divide-and-Conquer-Algorithmus auf dem entstehenden Kern verwendet wird, auf den Eingaben (G_k, k) im Worst-Case eine Laufzeit von $\Theta(k^2 2^k)$ benötigt.

(b) Beschreiben Sie eine andere Möglichkeit, die beiden Algorithmen zu kombinieren, so dass die Laufzeit auf diesen Eingaben polynomiell in k wird.

10 Punkte

Aufgabe 6

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Menge $X \subseteq V$ sagen wir, dass X ein *Feedback-Vertex-Set* von G ist, falls $G - X$ ein azyklischer Graph (d. h. ein Wald) ist. Das Problem

FEEDBACKVERTEXSET besteht darin, für einen gegebenen Graphen G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ zu entscheiden, ob G ein Feedback-Vertex-Set der Grösse höchstens k hat.

Wir wollen einen parametrisierten Algorithmus für FEEDBACKVERTEXSET bezüglich des Parameters k entwerfen. Hierfür ist es hilfreich, das Problem auf Multigraphen zu verallgemeinern, in denen Mehrfachkanten und Schleifen auftreten können, die wir dann als Kreise im Multigraphen interpretieren. Weiterhin verwenden wir die Konvention, dass eine Schleife von v nach v den Wert 2 zum Grad des Knotens v beiträgt.

Der Algorithmus basiert auf dem Entwurf eines tiefenbeschränkten Suchbaums und der zusätzlichen Anwendung von Datenreduktionsregeln.

Eine beliebige Instanz von FEEDBACKVERTEXSET können wir durch die Anwendung folgender Regeln vereinfachen:

R1. Wenn es eine Schleife an einem Knoten v gibt, lösche v und verringere k um 1.

R2. Wenn es eine Kante mit Mehrfachheit > 2 gibt, reduziere die Mehrfachheit auf 2.

R3. Lösche alle Knoten, die Grad 0 oder 1 haben.

R4. Wenn es einen Knoten vom Grad 2 gibt, lösche ihn und füge eine Kante zwischen seinen beiden Nachbarn hinzu.

Sei (G, k) eine beliebige (Multigraph-)Instanz. Wenn man auf G immer die Regel mit der kleinsten Nummer anwendet, die anwendbar ist, dann ergibt sich schliesslich eine Instanz (G', k'), so dass $k' \leq k$ gilt und G' ein Multigraph ohne Schleifen ist, der nur einfache oder doppelte Kanten hat und in dem jeder Knoten einen Grad von mindestens 3 hat.

(a) Begründen Sie kurz, dass diese Reduktionsregeln sicher sind, dass also die ursprüngliche Instanz genau dann eine Ja-Instanz für FEEDBACKVERTEXSET ist, wenn dies auch auf die reduzierte Instanz zutrifft.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph. Wir definieren $D(S) = \sum_{v \in S}(\deg(v) - 1)$ für jede beliebige Teilmenge $S \subseteq V$. Zeigen Sie, dass für jedes Feedback-Vertex-Set X in einem Multigraphen $G = (V, E)$ gilt, dass

$$D(X) \geq |E| - |V| + 1 \, .$$

(c) Sei $G = (V, E)$ ein mit Hilfe der Reduktionsregeln reduzierter Multigraph, sei $V = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$, wobei $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \ldots \geq \deg(v_n)$. Sei $3k \leq n$ und sei $V_{3k} = \{v_1, \ldots, v_{3k}\}$. Zeigen Sie, dass jedes Feedback-Vertex-Set in G der Grösse höchstens k mindestens einen Knoten aus V_{3k} enthält.

Hinweis: Verwenden Sie für einen Widerspruchsbeweis die Aussage aus Aufgabenteil (b) und schätzen Sie $D(V_{3k})$ und $D(V - V_{3k})$ ab.

(d) Zeigen Sie, dass es für Multigraphen einen Algorithmus für FEEDBACKVERTEXSET mit einer Laufzeit in $(3k)^k \cdot p(n)$ gibt, wobei p ein Polynom ist. Sie können davon ausgehen, dass die maximale Kantenmehrfachheit des Multigraphen polynomiell in n ist.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 28. März 2023, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.