ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/`

Übungsaufgaben – Blatt 9

Zürich, 25. April 2023

Aufgabe 10

In der Vorlesung haben wir einen Algorithmus für 3SAT mit Laufzeit $\mathcal{O}^*(1.8393^n)$ kennengelernt, wobei n die Anzahl Variablen der vorgegebenen Formel bezeichnet. Der Algorithmus berechnet einen Suchbaum, dessen Knoten den rekursiv gelösten Teilformeln entsprechen. Die Laufzeit des Algorithmus lässt sich auf $\mathcal{O}^*(\phi^n)$ verbessern, wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$ der goldene Schnitt ist, indem der Algorithmus in jedem Schritt eine Klausel mit der kleinsten Anzahl Literale für die Verzweigung des Suchbaums wählt und keine Verzweigung in mehrere Teilformeln vornimmt, falls es eine autarke Belegung für die gewählte Klausel gibt. Eine (partielle) Belegung der Variablen in einer KNF-Formel heisst *autark*, falls sie alle Klauseln erfüllt, die eine belegte Variable enthalten.

Sei nun $T(n)$ die maximale Anzahl von Blättern in einem Suchbaum des modifizierten Algorithmus für eine beliebige Formel mit n Variablen und sei $T'(n)$ die maximale Anzahl von Blättern im Suchbaum für eine Formel, die mindestens eine Klausel der Länge höchstens 2 enthält. Wir nehmen an, dass eine Teilformel mit höchstens drei Variablen in konstanter Zeit ohne weitere Verzweigungen gelöst wird. Somit gilt $T(n) = T'(n) = 1$ für $n \leq 3$.

(a) Beschreiben Sie die Teilformeln, die der modifizierte Algorithmus für eine gewählte Klausel berechnet, insbesondere wenn es eine autarke Belegung für die gewählte Klausel gibt. Beweisen Sie die Korrektheit des modifizierten Algorithmus und schätzen Sie die Laufzeit ab, um alle Teilformeln für einen Knoten des Suchbaums zu berechnen.

Hinweis: Eine 3KNF Formel mit n Variablen besteht aus höchstens $\mathcal{O}(n^3)$ Klauseln.

(b) Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen für alle $n \geq 4$:

$$T(n) \leq \max\{T(n-1),\ T'(n-1) + T'(n-2) + T'(n-3)\}\,,$$
$$T'(n) \leq \max\{T(n-1),\ T'(n-1) + T'(n-2)\}\,.$$

(c) Beweisen Sie, dass $T(n) \leq 3 \cdot \phi^n$ und $T'(n) \leq 2 \cdot \phi^n$.

Hinweis: Der goldene Schnitt ϕ erfüllt die quadratische Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

(d) Leiten Sie die Schranke $\mathcal{O}^*(\phi^n)$ für die Laufzeit des modifizierten Algorithmus her.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 2. Mai 2023, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.