ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/

Übungsaufgaben – Blatt 13

Zürich, 23. Mai 2023

Aufgabe 15

In der Vorlesung wurde ein Algorithmus für das Set-Cover-Problem verwendet, der in polynomieller Zeit eine logarithmische Approximation berechnet. Der Algorithmus ist ein einfacher Greedy-Algorithmus, der in jedem Schritt eine Menge so wählt, dass möglichst viele neue Knoten abgedeckt werden. In dieser Aufgabe werden wir die Approximationsgüte dieses Algorithmus herleiten.

Eingabe: Eine endliche Menge U und eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ mit $U = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$.

Algorithmus GREEDY-MIN-SCP :
  $\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$;
  $U_{\text{free}} \leftarrow U$;
  while $U_{\text{free}} \neq \emptyset$ **do**
    wähle ein $S \in \mathcal{F}$, sodass $|S \cap U_{\text{free}}|$ maximal ist;
    $U_{\text{free}} \leftarrow U_{\text{free}} \setminus S$;
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{S\}$;
  end
  return $\mathcal{C}$;

Sei $\mathcal{C} = \{S_1, \dots, S_k\}$ die Menge, die der Algorithmus liefert, wobei S_i im i-ten Durchlauf der Schleife gewählt wird. Wir definieren

$$D_{\mathcal{C},i} := S_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j$$

als die Menge der Knoten, die von S_i neu abgedeckt werden. Für $x \in D_{\mathcal{C},i}$ und $T \subseteq U$ definieren wir ausserdem das Gewicht

$$w_{\mathcal{C}}(x) = \frac{1}{|D_{\mathcal{C},i}|}, \quad w_{\mathcal{C}}(T) = \sum_{x \in T} w_{\mathcal{C}}(x)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $|\mathcal{C}| = w_{\mathcal{C}}(U)$.

(b) Sei $S \in \mathcal{F}$. Wir schreiben $S = \{x_1, \dots, x_l\}$, wobei wir die Nummerierung der Elemente so wählen, dass x_j im Algorithmus nicht nach x_{j+1} abgedeckt wird. Zeigen Sie, dass

$$w_{\mathcal{C}}(x_j) \leq \frac{1}{l - j + 1}\,.$$

(c) Sei nun $\mathcal{C}_{\text{opt}}$ eine optimale Lösung für die Instanz und sei $S_{\max}$ eine Menge maximaler Grösse in $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass

$$|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{C}_{\text{opt}}| \cdot \operatorname{har}(|S_{\max}|)\,,$$

wobei $\operatorname{har}(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te harmonische Zahl ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine $\ln(n)$-Approximation erreicht für $n = |U| \cdot |\mathcal{F}|$, falls $|\mathcal{F}| \geq 3$. Wieso können wir annehmen, dass $|\mathcal{F}| \geq 3$?

(e) Überprüfen Sie schliesslich, dass die Laufzeit des Algorithmus in $\mathcal{O}(n^{3/2})$ ist für $n = |U| \cdot |\mathcal{F}|$.

10 Punkte

Abgabe: Bis Dienstag, den 30. Mai 2023, nach der Vorlesung per E-Mail an den Übungsgruppenleiter Moritz Stocker.