ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/`

Lösungsvorschläge – Blatt 2

Zürich, 7. März 2023

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Wir zeigen, dass mindestens eine Belegung existiert, die mindestens k Klauseln in Φ erfüllt. Dazu betrachten wir eine beliebige Belegung. Wenn sie mindestens k Klauseln erfüllt, sind wir fertig. Andernfalls erfüllt sie weniger als k Klauseln; dann invertieren wir die Belegung jeder einzelnen Variablen und erhalten eine Belegung, die mindestens alle anderen Klauseln in Φ erfüllt. Das sind mehr als $m-k$ viele, also mindestens $m-k+1 \geq m-\lceil m/2 \rceil + 1 \geq \lceil m/2 \rceil \geq k$.

(b) Wenn $L \geq k$ gilt, bedeutet das, es gibt mindestens k lange Klauseln. Wir wählen eine beliebige lange Klausel und darin wiederum ein beliebiges Literal, das wir auf wahr setzen. Dann wählen wir eine beliebige andere lange, noch unerfüllte Klausel. In dieser Klausel sind noch mindestens $k-1$ Literale unbelegt. Eines davon setzen wir auf wahr. Dann fahren wir mit einer weiteren Klausel fort. Dies wiederholen wir so oft, bis mindestens k Klauseln aus Φ_{l} erfüllt sind, also höchstens k-mal. Da alle langen Klauseln mindestens k Literale enthalten, ist in jeder neu gewählten Klausel noch mindestens ein Literal unbelegt.

(c) Wir zeigen zuerst $(\Phi_{\mathrm{s}}, k-L) \in \text{Lang}_{\text{Max-Sat}} \implies (\Phi, k) \in \text{Lang}_{\text{Max-Sat}}$.

Es existiert also eine Belegung, die mindestens $k-L$ Klauseln in Φ_{s} erfüllt. Indem wir aus jeder Klausel ein erfülltes Literal betrachten, können wir eine Belegung von höchstens $k-L$ Variablen konstruieren, die immer noch mindestens $k-L$ Klauseln in Φ_{s} erfüllt. Es bleiben also in den langen Klauseln noch mindestens $k-(k-L)=L$ Variablen übrig, die wir frei belegen können. Damit können wir nun mit der Methode aus Aufgabenteil (b) alle Klauseln in Φ_{l} erfüllen und haben somit insgesamt $k-L+L=k$ Klauseln in Φ erfüllt, d.h. $(\Phi, k) \in \text{Lang}_{\text{Max-Sat}}$.

Nun zeigen wir $(\Phi, k) \in \text{Lang}_{\text{Max-Sat}} \implies (\Phi_{\mathrm{s}}, k-L) \in \text{Lang}_{\text{Max-Sat}}$.

Es ist offensichtlich, dass eine Belegung, die mindestens k Klauseln in Φ erfüllt, mindestens $k-L$ Klauseln in Φ_{s} erfüllt, da sie in Φ_{l} ja höchstens L zusätzliche Klauseln erfüllen kann.

(d) Es gibt genau $m-L \leq m$ kurze Klauseln, und jede enthält höchstens $k-1$ Literale. Weil wir wie in Teilaufgabe (c) annehmen können, dass $k > \lceil m/2 \rceil$, gilt insbesondere $m < 2k$. Somit ist die Anzahl Literale in Φ_{s} nach oben beschränkt durch $m \cdot (k-1) < 2k^2$.