ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/`

Lösungsvorschläge – Blatt 3

Zürich, 14. März 2023

Lösung zu Aufgabe 3

Wir wollen zeigen, dass die Schwellensprache $\text{Lang}_{3\text{HS}}$ für das Problem 3-Hitting Set bezüglich der Grösse k der gesuchten Lösung einen Problemkern der Grösse $\mathcal{O}(k^3)$ besitzt. Die Idee beruht ähnlich wie beim Problem Vertex Cover darauf, zu zeigen, dass Elemente der Grundmenge, die in vielen Hyperkanten vorkommen (also Knoten des entsprechenden Hypergraphen mit hohem Grad), auf jeden Fall in einer kleinen Lösung enthalten sein müssen.

Um dies formal zu zeigen, sei $((S, \mathcal{C}), k)$ eine Instanz für $\text{Lang}_{3\text{HS}}$. Wir beschreiben im Folgenden zwei Datenreduktionsregeln, die die Eigenschaften (a) und (b) aus der Aufgabenstellung erfüllen.

(a) Seien $x, y \in S$, $x \neq y$, zwei Elemente, die in mehr als k Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ aus $\mathcal{C}$ gleichzeitig vorkommen, wobei $k \neq 0$. Wir zeigen, dass dann x oder y zwingend in jeder Lösung für die Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ enthalten ist. Da jede Hyperkante aus höchstens 3 Knoten besteht, ist jedes weitere Element $z \notin \{x, y\}$ aus S in höchstens einer der Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ enthalten. Mit einer Lösung der Grösse k, die weder x noch y enthält, lassen sich also höchstens k der Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ treffen. Also brauchen wir mindestens $k + 1$ verschiedene Elemente, um alle Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ zu treffen. Weil dies keine zulässige Lösung für die Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Also können wir die Instanz wie folgt reduzieren: Wir streichen die Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ aus $\mathcal{C}$ und fügen dafür die Hyperkante $\{x, y\}$ hinzu. Die so entstehende neue Instanz ist offenbar äquivalent zu der alten Instanz. Ausserdem werden wegen $k \neq 0$ auch die restlichen Eigenschaften aus (a) offensichtlich erfüllt.

Diese Reduktionsregel können wir so lange anwenden, bis es keine zwei Elemente $x, y \in S$, $x \neq y$, gibt, die in mehr als k Hyperkanten gleichzeitig vorkommen, oder $k = 0$ gilt, womit die Instanz trivial ist. Wegen der Bedingung $|\mathcal{C}'| < |\mathcal{C}|$ lässt sich die Regel höchstens $|\mathcal{C}|$-mal anwenden.

(b) Wir nehmen an, dass die Datenreduktionsregel (a) nicht mehr anwendbar ist, dass es also keine zwei Elemente $x, y \in S$, $x \neq y$, gibt, die in mehr als k Hyperkanten gleichzeitig vorkommen, wobei $k \neq 0$. Sei nun $x \in S$ ein festes Element, das in mehr als k^2 Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ vorkommt.

Wir zeigen, dass dann x zwingend in jeder Lösung für die Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ enthalten ist. Da sich die Datenreduktionsregel (a) nicht mehr anwenden lässt, ist jedes weitere Element $y \neq x$ aus S in höchstens k der Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ enthalten. Mit einer Lösung der Grösse k, die x nicht enthält, lassen sich also höchstens k^2 der Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ treffen. Also brauchen wir mindestens $k+1$ verschiedene Elemente, um alle Hyperkanten $C_1, C_2, \ldots, C_l$ zu treffen. Weil dies keine zulässige Lösung für die Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Weil x zwingend in jeder Lösung für die Instanz $((S, \mathcal{C}), k)$ enthalten sein muss, können x aus S und alle Hyperkanten mit x aus $\mathcal{C}$ entfernt werden. Die so entstehende neue Instanz ist mit $k' = k - 1$ offenbar äquivalent zu der alten Instanz. Ausserdem werden wegen $k \neq 0$ auch die restlichen Eigenschaften aus (b) offensichtlich erfüllt.

Diese Reduktionsregel können wir so lange anwenden, bis es kein Element $x \in S$ gibt, das in mehr als k^2 Hyperkanten vorkommt, oder $k = 0$ gilt, womit die Instanz trivial ist. Wegen der Bedingung $|\mathcal{C}'| < |\mathcal{C}|$ lässt sich die Regel höchstens $|\mathcal{C}|$-mal anwenden.

Nach Anwendung der beiden oben beschriebenen Reduktionsregeln entfernen wir alle Elemente, die in keiner Hyperkante vorkommen, da sie ohnehin aus jeder zulässigen Lösung entfernt werden können. Somit ergibt sich eine Instanz $((S^*, \mathcal{C}^*), k^*)$ mit $k^* \leq k$, in der jedes Element $x \in S^*$ in mindestens einer Hyperkante und höchstens $k^{*2} \leq k^2$ Hyperkanten vorkommt. Wenn es also eine Lösung $H \subseteq S^*$ der Grösse $|H| \leq k^* \leq k$ gibt, dann werden höchstens $|H| \cdot k^2 \leq k \cdot k^2 = k^3$ Hyperkanten in $\mathcal{C}^*$ durch H getroffen. Wenn also $|\mathcal{C}^*| > k^3$, können nicht alle Hyperkanten getroffen sein, also $((S^*, \mathcal{C}^*), k^*) \notin \mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$. Nehmen wir nun an, dass $|\mathcal{C}^*| \leq k^3$ gilt. Dann enthalten die Hyperkanten aus $\mathcal{C}^*$ höchstens $3 \cdot |\mathcal{C}^*| \leq 3 \cdot k^3$ Elemente aus S^* (da jede Hyperkante in $\mathcal{C}^*$ aus höchstens 3 Elementen besteht). Da jedes Element aus S^* in mindestens einer Hyperkante vorkommt, gilt $|S^*| \leq 3 \cdot k^3$. Somit erhalten wir einen Problemkern $((S^*, \mathcal{C}^*), k^*)$ mit $|S^*| \leq 3 \cdot k^3 \in \mathcal{O}(k^3)$, $|\mathcal{C}^*| \leq k^3 \in \mathcal{O}(k^3)$, $k^* \leq k \in \mathcal{O}(k)$.

Mit Hilfe der oben beschriebenen Reduktionsregeln können wir nun einfach einen k-parametrisierten Algorithmus für $\mathrm{Lang}_{3\mathrm{HS}}$ angeben: Berechne den Problemkern und führe dann eine vollständige Suche auf dem Problemkern durch. Falls die Instanz während der Berechnung vom Problemkern trivial wird, löse diese triviale Instanz in Polynomzeit.