ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/`

Lösungsvorschläge – Blatt 10

Zürich, 9. Mai 2023

Lösung zu Aufgabe 11

Der unten angegebene Algorithmus Subset-Sum-Solver berechnet eine Lösung für Subset-Sum.

Subset-Sum-Solver

Eingabe: $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{N}$

Ausgabe: "Ja", falls ein $Z \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $\sum_{s \in Z} s = b$ existiert; sonst "Nein".

Arbeitsweise:

1. Teile die Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ in die beiden Hälften $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$ und $Y = \{a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, \dots n\}$ auf.
2. Berechne für jede der beiden Mengen X und Y die Mengen $I_X = \{\sum S \mid S \subseteq X\}$ und $I_Y = \{\sum S \mid S \subseteq Y\}$ aller möglichen Teilmengensummen.
3. Sortiere die Elemente der Menge I_Y.
4. Führe für jedes $x \in I_X$ eine Binärsuche nach dem Element $b - x$ in der Menge I_Y durch. Gib "Ja" aus, falls für irgendein $x \in I_X$ das passende Element $y = b - x \in I_Y$ gefunden wird; andernfalls gib "Nein" aus.

Korrektheit: Der Algorithmus ist offensichtlich korrekt, da wir bijektiv jedes Paar (X, Y) von Teilmengen $X \subseteq \{a_1, \dots, a_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $Y \subseteq \{a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\}$ der Teilmenge $Z = X \cup Y \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ zuordnen können, wobei

$$\underbrace{\sum_{s \in X} s}_{=:x} + \underbrace{\sum_{s \in Y} s}_{=:y} = \underbrace{\sum_{s \in Z} s}_{=:z}$$

gilt und entsprechend $z = b$ genau dann möglich ist, wenn x und y existieren, sodass $x + y = b$.

Laufzeitanalyse: Die Mengen I_X und I_Y enthalten beide höchstens $k = 2^{n/2+1}$ Elemente.

Das Sortieren von I_Y ist in Zeit $\mathcal{O}(k \log k)$ möglich und die Binärsuche, die höchstens k Mal durchgeführt wird, beansprucht jeweils Zeit $\mathcal{O}(\log k)$. Die Gesamtlaufzeit ist entsprechend in $\mathcal{O}(k \log k) = \mathcal{O}(2^{n/2} \log(2^{n/2})) \subseteq \mathcal{O}^*((2^{1/2})^n) \subseteq \mathcal{O}^*(1.4143^n)$.