ETH zürich
Departement Informatik

Algorithmik für schwere Probleme

Prof. Dr. Dennis Komm
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/schwere_prob_23/`

Lösungsvorschläge – Blatt 11

Zürich, 16. Mai 2023

Lösung zu Aufgabe 12

(a) Der modifizierte Algorithmus ist wie folgt definiert:

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten.
Ausgabe: Alle inklusions-maximalen Independent-Sets S von G.

function $\textsc{All-IS}(G)$:
  if $V = \emptyset$ **then return** $\{\emptyset\}$;
  else
    $v \leftarrow \{v \in V \mid \delta(v) = \delta_{\min}(G)\}$;
    return $\bigcup_{u \in N[v]} \{\{u\} \cup S \mid S \in \textsc{All-IS}(G - N[u])\}$;
  end

Wir zeigen nun die Korrektheit des Algorithmus per Induktion über die Anzahl Knoten n. Im Fall $n = 0$ ist die leere Menge das einzige Independent-Set des leeren Graphen. Also ist $\textsc{All-IS}(G) = \{\emptyset\}$ korrekt. Falls $n > 0$, dann wählt der Algorithmus $\textsc{All-IS}(G)$ einen Knoten v mit minimalem Knotengrad $\delta(v) = \delta_{\min}(G)$ und gibt die Mengen

$$\bigcup_{u \in N[v]} \{\{u\} \cup S \mid S \in \textsc{All-IS}(G - N[u])\}$$

zurück. Aus der Induktionsannahme folgt für jedes $u \in N[v]$, dass $\textsc{All-IS}(G - N[u])$ alle inklusions-maximalen Independent-Sets von $G - N[u]$ zurückgibt. Sei $S \in \textsc{All-IS}(G - N[u])$. Dann ist $\{u\} \cup S$ offenbar ein Independent-Set von G. Die Menge $\{u\} \cup S$ lässt sich offenbar durch keinen Nachbarn $w \in N(u)$ von u zu einen Independent-Set von G erweitern. Falls sich die Menge $\{u\} \cup S$ durch einen Knoten $w \in V(G) \setminus N[u] \setminus S$ zu einem Independent-Set $\{u\} \cup (\{w\} \cup S)$ von G erweitern liesse, dann liesse sich auch die Menge S zu einem Independent-Set $\{w\} \cup S$ von $G - N[u]$ erweitern, was zu einem Widerspruch führt. Deshalb ist die Menge $\{u\} \cup S$ ein inklusions-maximales Independent-Set von G. Es folgt, dass $\textsc{All-IS}(G)$ nur inklusions-maximale Independent-Sets von G zurückgibt.

Sei nun S ein beliebiges inklusions-maximales Independent-Set von G. Wir zeigen, dass $S \in \textsc{All-IS}(G)$, also dass $\textsc{All-IS}(G)$ alle inklusions-maximalen Independent-Sets von G zurückgibt. Falls S weder den Knoten v noch einen Nachbarn $u \in N(v)$

enthält, dann lässt sich S durch den Knoten v zu einem Independent-Set $\{v\} \cup S$ von G erweitern, was zu einem Widerspruch führt. Sei $u \in N[v]$, also entweder $u = v$ oder $u \in N(v)$, wobei $u \in S$ ein beliebiger Knoten in S ist. Dann kann das Independent-Set S keinen Knoten aus $N[u]$ enthalten und die Menge $S \setminus \{u\}$ ist ein Independent-Set von $G - N[u]$. Es reicht zu zeigen, dass $S \setminus \{u\} \in \text{All-IS}(G - N[u])$, also dass $S \setminus \{u\}$ inklusions-maximal bezüglich $G - N[u]$ ist. Falls sich $S \setminus \{u\}$ durch einen Knoten $w \in V(G) \setminus N[u] \setminus S$ zu einem Independent-Set von $G - N[u]$ erweitern liesse, dann liesse sich auch die Menge $S = \{u\} \cup (S \setminus \{u\})$ zu einem Independent-Set $S \cup \{w\} = \{u\} \cup (\{w\} \cup (S \setminus \{u\}))$ von G erweitern, was zu einem Widerspruch führt. Aus $S \setminus \{u\} \in \text{All-IS}(G - N[u])$ folgt schliesslich, dass $S = \{u\} \cup (S \setminus \{u\}) \in \text{All-IS}(G)$.

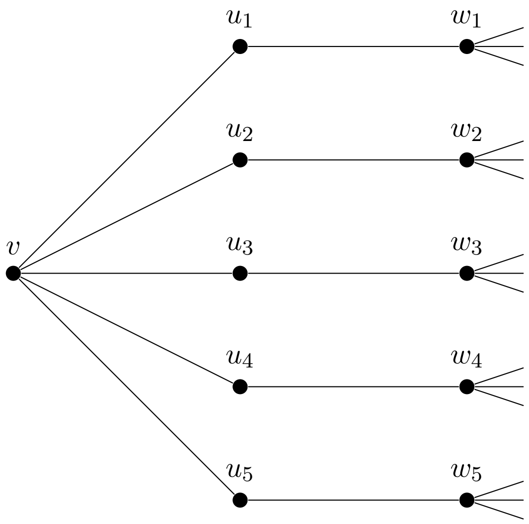
(b) Der Algorithmus führt zur selben Baumstruktur wie der Algorithmus aus der Vorlesung, der ein maximales Independent-Set berechnet. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dieser Baum höchstens $3^{n/3}$ Blätter hat. Da jedes solche Blatt nur einem inklusions-maximalen Independent Set entspricht und der Algorithmus alle diese generiert, kann es auch höchstens $3^{n/3}$ inklusions-maximale Independent-Sets geben.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige durch 3 teilbare natürliche Zahl. Wir betrachten den Graphen T_n auf n Knoten, der aus $n/3$ paarweise disjunkten Dreiecken besteht. Ein inklusions-maximales Independent-Set von T_n besteht aus genau einem Knoten von jedem der $n/3$ Dreiecke. Insgesamt gibt es also $3^{n/3} \approx 1.442^n$ inklusions-maximale Independent-Sets von T_n und die Abschätzung aus Teilaufgabe (b) lässt sich deshalb nicht mehr verbessern. Damit ist auch klar, dass kein Algorithmus eine bessere Laufzeit haben kann.

Lösung zu Aufgabe 13

In dieser Aufgabe betrachten wir das Mass $w(G) = n_{\geq 3}$, wobei $n_{\geq 3}$ die Anzahl Knoten mit Grad mindestens 3 bezeichnet. Der Algorithmus aus der Vorlesung verzweigt in die Teilgraphen $G_{\text{out}} = G - v$ und $G_{\text{in}} = G - N[v]$, wobei v einen Knoten von maximalem Grad $\delta(v) = \delta_{\max}(G)$ in einem Graphen G bezeichnet, der keine Knoten von Grad höchstens 1 enthält (der Algorithmus macht ohne Verzweigung mit der einzigen Instanz $G - N[v]$ weiter, solange es einen Knoten v mit $\delta(v) \leq 1$ in G gibt).

Wir untersuchen nun den folgenden Fall: der Grad vom Knoten v beträgt mindestens 4, $\delta(v) \geq 4$, alle Nachbarn $u \in N(v)$ vom Knoten v haben Grad $\delta(u) = 2$ und alle Nachbarn $w \in N(u)$ von Knoten $u \in N(v)$ haben Grad mindestens 4, $\delta(w) \geq 4$. Eine mögliche Umgebung vom Knoten v ist auf der folgenden Abbildung dargestellt.



Wir berechnen nun $w(G_{\text{out}}) = w(G_{\text{in}}) = w(G) - 1$, da die Anzahl Knoten mit Grad mindestens 3 in G_{out} und G_{in} jeweils um 1 sinkt (wegen dem Knoten v mit $\delta(v) \geq 4$). Die Knoten w_i haben nämlich auch nach Entfernung der Knoten u_i in G_{in} Grad mindestens 3 und deshalb die Anzahl Knoten mit Grad mindestens 3 nicht beeinflussen.

In diesem Fall ergibt sich also ein Branching-Vector von $(1, 1)$ mit dem charakteristischen Polynom $x^n - 2 \cdot x^{n-1} = 0$. Die einzige positive Nullstelle von diesem Polynom ist $x = 2$ und der Branching-Factor beträgt somit $\alpha = 2$. Die Laufzeit von dem Algorithmus lässt sich also lediglich durch $\mathcal{O}^*(2^n)$ abschätzen. Die vereinfachte Analyse mit dem Mass $w(G) = n_{\geq 3}$ bringt also keine Verbesserung bezüglich dem naiven Algorithmus, der alle Teilmengen der Knotenmenge in $\mathcal{O}^*(2^n)$ durchiteriert.